ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ СИЛЫ ЛОРЕНЦА ИЗ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Д.т.н., проф. В.Эткин

Показано, что выражение магнитной составляющей силы Лоренца
непосредственно следует из уравнений Максвелла, если последние
выведены из первичных принципов и содержат полные производные
по времени от электрических и магнитных полей

Введение. До настоящего времени в классической электродинамике существуют два слабо связанных друг с другом раздела. С одной стороны, имеется формула Лоренца, определяющая силовое взаимодействие электродинамических систем. Она исходит из требований инвариантности законов Максвелла в инерциальных системах отсчета и опирается на соображения теории относительности [1].

С другой стороны, существуют уравнения Максвелла [2], из которых следуют нерелятивистские волновые уравнения для электромагнитных полей. В результате столь странного «размежевания» двух направлений одной и той же области знаний до настоящего времени вся классическая электродинамика находится в состоянии, когда для объяснения электродинамических явлений приходится применять принципиально различные подходы. Наглядным примером такой «двойственности» является известное исключение из «правила потока», сформулированного Фарадеем (1831). Согласно этому правилу, ЭДС $\mathcal{E}$ в контуре с током равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока $\Phi_м$, пронизывающего контур:

$$\mathcal{E} = -\, d\Phi_м/dt \,, \tag{1}$$

В этой формулировке неразличимы две возможности: движется контур или меняется поле. Для анализа этих случаев в электродинамике приходится пользоваться двумя совершенно разными законами: магнитной составляющей силы Лоренца $e(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ в случае движущегося контура или законом $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\,(\partial\mathbf{B}/\partial t)$ в случае меняющегося поля. Как отмечает Р. Фейнман, «мы не знаем ни одного другого такого примера, когда бы простой и точный закон требовал для своего настоящего понимания анализа в терминах *двух разных явлений*» [1].

Цель нашей стати – показать, что магнитную составляющую силы Лоренца можно получить без привлечения соображений теории относительности непосредственно из уравнений Максвелла, если в них частные производные от векторов электрической и магнитной индукции $(\partial\mathbf{E}/\partial t)$ и $(\partial\mathbf{B}/\partial t)$ заменить на полные $d\mathbf{E}/dt$ и $d\mathbf{B}/dt$, как это первоначально имело место в его работах [3]. Этот же вывод следует из термодинамического вывода уравнений Максвелла, основывающегося на основном уравнении термодинамики диэлектриков и магнетиков в форме [4]

$$dЭ_v = TdS - \mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} - \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B} \,, \tag{2}$$

которое связывает энергию $Э_v$ единицы объема системы с работой её поляризации $đW_{ev} = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}$ и намагничивания $đW_{мv} = \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$ внешними полями с напряженностью $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Интересующая нас пара скорректированных уравнений Максвелла имеет вид:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\, d\mathbf{B}/dt. \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \,. \tag{4}$$

Поскольку полная производная от магнитного поля по времени $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, её полный дифференциал

$$d\mathbf{B}/dt = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\partial\mathbf{B}/\partial t). \quad (5)$$

где **v** – скорость переноса электрического заряда. После подстановки (5) в (3) имеем:

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -(\mathbf{v}_e\cdot\nabla)\mathbf{B} - (\partial\mathbf{B}/\partial t). \quad (6)$$

Согласно известным правилам векторного анализа [5, III-9]

$$(\mathbf{v}_e\cdot\nabla)\mathbf{B} = -\text{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \mathbf{v}\text{div}\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{B}\text{div}\mathbf{v}. \quad (7)$$

В силу (4) второй член правой части (7) обращается в нуль. При $\mathbf{v}$ = const обращаются в нуль и последующие члены, выражающиеся через градиенты и дивергенцию скорости. Что же касается второго члена правой части (6), то, используя определение векторного потенциала $\mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A}$, его можно представить в виде $(\partial\mathbf{B}/\partial t) = \text{rot}\,(\partial\mathbf{A}/\partial t)$. С учетом этого выражение (6) принимает вид:

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \text{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - \text{rot}(\partial\mathbf{A}/\partial t), \quad (8)$$

или в дифференциальной форме

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v}\times\mathbf{B}] - (\partial\mathbf{A}_e/\partial t). \quad (9)$$

Слагаемые правой части этого выражения характеризуют «сторонние» (индуцированные) силы, действующие на движущийся электрический заряд e помимо кулоновской силы $\mathbf{E_к} = -\nabla\varphi$ (которая в данном выражении отсутствует в связи с тем, что при выводе уравнений (3) и (4) рассматривался замкнутый электрический контур). В более общем случае вслед за Максвеллом можем написать :

$$\mathcal{E} = \int(-\nabla\varphi + \mathbf{v}\times\mathbf{B} - \partial\mathbf{A}_e/\partial t)d\boldsymbol{\ell}_e\,. \quad (10)$$

Таким образом, полная сила $\mathbf{F}_e$, действующая на заряд e, имеет вид:

$$\mathbf{F}_e = -e[\nabla\varphi - \mathbf{v}\times\mathbf{B} + (\partial\mathbf{A}_e/\partial t)], \quad (11)$$

т.е. включает не только так называемую «магнитную составляющую» силы Лоренца $\mathbf{F}_л = e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$, но и силу $e\,(\partial\mathbf{A}_e/\partial t)$, не имеющую специфического названия. Это позволяет обобщить закон Ома на случай действия «некулоновских» сил:

$$\mathbf{j}_e = -\sigma_e\{\nabla\varphi - [\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + (\partial\mathbf{A}_e/\partial t)\}\,, \quad (12)$$

где σ_e – коэффициент электропроводности.

Дальнейшее обобщение закона Ома на случай действия термических, химических и т.п. сил осуществляется уже вне рамок электродинамики. В частности, как показано в [3], в системах с неоднородным полем температур закон Ома следует дополнить «термоэлектрической силой» $\mathbf{X}_{ет}$, выражающейся градиентом температуры. В еще более общем случае электрохимических систем на движение заряженных частиц влияют также электрохимические силы $\mathbf{X}_{ek}$, определяемые градиентами концентрации заряженных компонентов системы. Это позволяет получить целый ряд так называемых «эффектов наложения» сил, выражающих взаимосвязь электрических явлений с неэлектрическими.

Литература

1. *Фейнман Р. , Лейтон Р., Сэндс М.*. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1976. Т. 6, с.54.
2. *Максвелл Дж. К.* Трактат по электричеству и магнетизму. – М.: Наука, 1989, Т.2, п. 598.
3. *Эткин В.* Энергодинамика (синтез теорий переноса и преобразования энергии).- СПб.- Наука, 2008.-409 с.
4. *Эткин В.А.* Термодинамический вывод уравнений Максвелла. (http: (//sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/7628.html),
5. Лойтянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: «Наука», 1978.